ТЕМА 1. УГЛЫ И ИХ ИЗМЕРЕНИЯ

Теоретический материал

Геометрический угол – это часть плоскости, ограниченная двумя лучами, выходящими из одной точки – вершины угла (рис. 1).

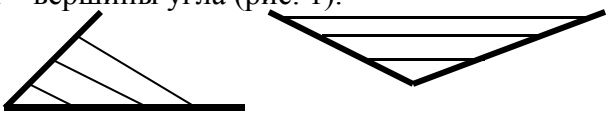


Рис. 1

В качестве единицы измерения геометрических углов принят градус - $\frac{1}{180}$ часть развернутого угла. Конкретные углы измеряют в градусах с помощью транспортира. Углы, получающиеся при непрерывном вращении, удобно измерять с помощью таких чисел, которые отображали бы сам процесс построения угла, т. е. вращение. На практике углы поворота зависят от времени.

Допустим, что зафиксированы вершина угла и один из образующих его лучей, а второй луч будет вращаться вокруг вершины. Получающиеся углы будут зависеть от скорости вращения и времени. Поворот будет определяться путем, который пройдет какая – либо фиксированная точка подвижного луча.

Если расстояние точки от вершины равно R, то при вращении точка движется по окружности радиуса R. Отношение пройденного пути к радиусу R не зависит от радиуса и может быть взято за меру угла. Численно эта мера равна пути, пройденному точкой по окружности единичного радиуса (рис. 2).

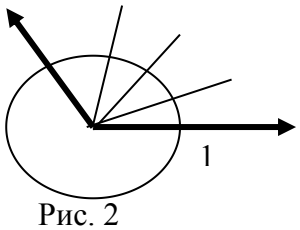


Рис. 2

Развернутый угол измеряется половиной длины единичной окружности. Это число обозначается буквой π. Число π = 3, 14159265358 …

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}017 \text{ и } 1\ рад. = \frac{180}{\pi} = 57{,}296^\circ .$$

В географии, астрономии и других прикладных науках используют доли градусов – минуту и секунду. Минута – это $\frac{1}{60}$ градуса, а секунда – $\frac{1}{60}$ минуты.

$$1 = \frac{1}{60}^\circ = 0{,}0003, \qquad 1 = \frac{1}{60} = \frac{1}{3600}^\circ = 0{,}000005$$

$$1\ рад. = 57{,}296^\circ = 57^\circ 17\ 45$$

Пример 1: Выразим в градусах 4,5 рад. Так как $1\ рад. = \frac{180}{\pi}$, то

$4{,}5\ рад. = 4{,}5\ \frac{180}{\pi} = \frac{810^\circ}{\pi} \approx 258^\circ .$

Пример 2: Найдем радианную меру угла 72° . Так как $1^\circ = \frac{\pi}{180} рад.$, то

$72^\circ = 72\ \frac{\pi}{180^\circ} рад. \approx 1{,}3\ рад.$

Выразим в радианной мере углы $30°, 45°, 60°, 90°, 270°, 360°$:

$30° = \frac{\pi}{180°}\ 30° = \frac{\pi}{6}$ $\quad 60° = \frac{\pi}{180°}\ 60° = \frac{\pi}{3}$ $\quad 270° = \frac{\pi}{180°}\ 270° = \frac{3\pi}{2}$

$45° = \frac{\pi}{180°}\ 45° = \frac{\pi}{4}$ $\quad 90° = \frac{\pi}{180°}\ 90° = \frac{\pi}{2}$ $\quad 360° = \frac{\pi}{180°}\ 360° = 2\pi$

Упражнения

1. Найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна:

1) 0,5; 3) $\frac{3\pi}{4}$; 5) 10;

2) $\frac{\pi}{5}$; 4) $-\frac{9\pi}{2}$; 6) $\frac{\pi}{9}$.

2. Найдите радианную меру угла, градусная мера которого равна:

1) $135°$; 3) $150°$; 5) $-120°$;

2) $36°$; 4) $240°$; 6) $210\ °$.

ТЕМА 2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Цель: формирование навыков использования свойств тригонометрических функций при преобразовании выражений.

Теоретический материал

Тригонометрические функции определяются с помощью координат вращающейся точки.

Отметим на оси x справа от начала координат точку A и проведем через нее окружность с центром в точке O. Радиус OA называется начальным радиусом. При повороте против часовой стрелки считают угол положительным, при повороте по часовой стрелке – отрицательным (рис. 3).

При повороте на угол α начальный радиус OA переходит в радиус OB.

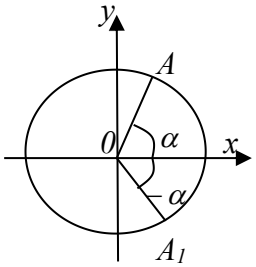


Рис. 3

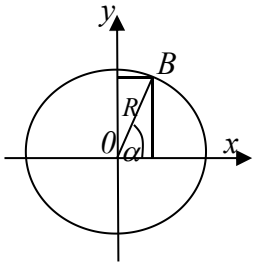


Рис. 4

Определение: Синусом угла α называется отношение ордината точки B к длине радиуса (рис. 4).

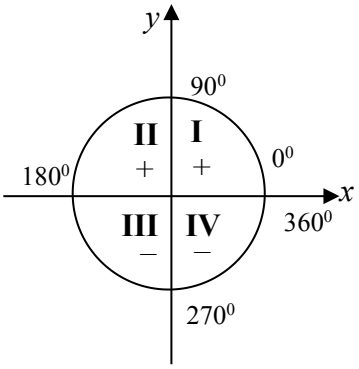
Определение: Косинусом угла α называется отношение абсциссы точки B к длине радиуса (рис. 4).

Определение: Тангенсом угла α называется отношение ординаты точки B к её абсциссе.

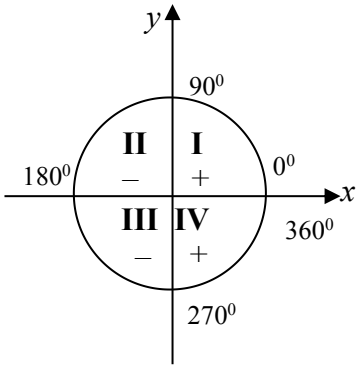
Определение: Котангенсом угла α называется отношение абсциссы точки B к её ординате.

Знаки тригонометрических функций определяются в зависимости от того, в какой четверти лежит рассматриваемый угол. I четверть – от $0°$ до $90°$, II четверть – от $90°$ до $180°$, III четверть – от $180°$ до $270°$, IV четверть - от $270°$ до $360°$.

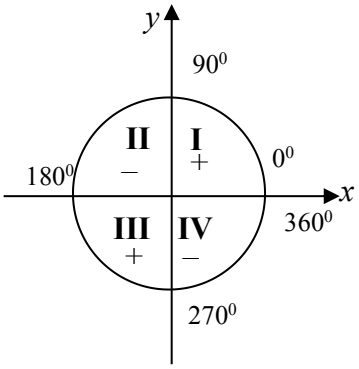
Знаки синуса



Знаки косинуса



Знаки тангенса и котангенса



При изменении угла на целое число оборотов значение синуса, косинуса, тангенса и котангенса не изменится.

Пример 1: Найдите значение $\sin(-810°)$.

Решение: $\sin(-810°) = -\sin(720° + 90°) = -\sin 90° = -1$.

Пример 2: Определите знак $\cos 52°$. Решение: Угол $52°$ - угол первой четверти, значит $\cos 52°$ имеет знак +.

Упражнения

1. Определите, какой знак имеют $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$ и $ctg\alpha$:
   а) $\alpha = 48°$;
   б) $\alpha = 137°$;
   в) $\alpha = 200°$;
   г) $\alpha = 306°$.
2. Определите, какой знак имеют тригонометрические функции:
   $tg145°$ $tg500°$ $\cos 315°$
   $ctg359°$ $\sin(-75°)$ $\sin 109°$
   $\cos 140°$ $\cos(-116°)$ $\cos(-26°)$
   $tg(-10°)$
3. Определите, углом, какой четверти является угол α, если:
   а) $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha > 0$;
   б) $\sin\alpha < 0$ и $\cos\alpha > 0$;
   в) $ctg\alpha < 0$ и $\sin\alpha < 0$;
   г) $tg\alpha < 0$ и $\cos\alpha > 0$
4. Определите знак выражения:
   а) $\sin 100° \cos 300°$;
   б) $\sin 190° \; tg 200°$;
   в) $\cos 320° \; ctg 17°$;
   г) $tg 170° \cos 400°$.
5. Найдите значение выражения:
   $\sin(-30°)$
   $tg(-900°)$
   $\cos 405°$
   $ctg 1110°$

ТЕМА 3. ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Теоретический материал

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$ctgx = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$tg^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$ctg^2 x + 1 = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

$tgx \ \ ctgx = 1$

Эти равенства называют основными тригонометрическими тождествами.

Пример 1. Упростите выражение $1 - \cos^2 x$.

Решение: Используем для решения формулу $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. $\Rightarrow$ $1 - \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x = \sin^2 x$

Пример 2. Найдите значение $tg\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение: $tg\alpha = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \ \Rightarrow \ \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

$\Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - \left(-\dfrac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \dfrac{16}{25}} = \sqrt{\dfrac{25-16}{25}} = \sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{3}{5}$

$tg\alpha = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \dfrac{3}{5} : \left(-\dfrac{4}{5}\right) = -\dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{5}{4} = -\dfrac{3}{4}$

Упражнения

1. Упростите выражения:
   1) $\sin^2 x - 1$;
   2) $\cos^2 x + \left(1 - \sin^2 x\right)$;
   3) $\sin^2 x + 2\cos^2 x - 1$;
   4) $\left(1 - \sin x\right)\left(1 + \sin x\right)$;
   5) $\left(\cos x - 1\right)\left(1 + \cos x\right)$;
   6) $1 - \sin^2 x - \cos^2 x$;
   7) $\cos^2 x - \left(1 - 2\sin^2 x\right)$;
   8) $\sin x \ \cos x \ tgx$;

2. Преобразуйте выражения:
   1) $\sin x \ \ ctgx$;
   2) $\cos x \ \ tgx$;
   3) $\dfrac{\sin x}{tgx}$;
   4) $\dfrac{tgx}{ctgx} + 1$;
   5) $\dfrac{\sin^2 x - 1}{1 - \cos^2 x}$.

3. Упростите выражение:
   $ctgx - \dfrac{\cos x - 1}{\sin x}$;
   $\dfrac{1}{\sin x - 1} + \dfrac{1}{1 + \sin x}$.

Самостоятельная работа

В – 1

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = \ldots$
2. $ctgx = \ldots$
3. $tg^2 x + 1 = \ldots$
4. $\sin x \ \ ctgx = \ldots$
5. $\dfrac{1 - \sin^2 x}{\cos x} = \ldots$

В – 2

1. $tgx \ \ ctgx = \ldots$
2. $tgx = \ldots$
3. $ctg^2 x + 1 = \ldots$
4. $tgx \ \cos x = \ldots$
5. $tg\left(-x\right) \ ctgx + \sin^2 x = \ldots$

ТЕМА 4. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Теоретический материал

Если в скобках $(90° \pm \alpha)$ или $(270° \pm \alpha)$, то функция меняется на сходную. Если $(180° \pm \alpha)$ или $(360° \pm \alpha)$, то функция не меняется. Знак результата определяется по знаку левой части.

$f(x)$	x							
	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{3\pi}{2} - x$	$\frac{3\pi}{2} + x$	$2\pi - x$	$2\pi + x$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
tgx	$ctgx$	$-ctgx$	$-tgx$	tgx	$ctgx$	$-ctgx$	$-tgx$	tgx
$ctgx$	tgx	$-tgx$	$-ctgx$	$ctgx$	tgx	$-tgx$	$-ctgx$	$ctgx$

Пример 1. Найдите значение $\cos\frac{8\pi}{3}$.

$$\cos\frac{8\pi}{3} = \cos\frac{6\pi+2\pi}{3} = \cos\frac{6\pi}{3}+\frac{2\pi}{3} = \cos 2\pi+\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{3\pi-\pi}{3} = \cos\frac{3\pi}{3}-\frac{\pi}{3}$$

$$= \cos\pi-\frac{\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

Пример 2. Найдите значение $\sin 300°$.

Решение: $\sin 300° = \sin(90° + 210°) = \cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Упражнения

1. Найдите значение выражения:
   1) $\sin 240°$;
   2) $\cos(-210°)$;
   3) $tg300°$;
   4) $\sin 330°$;
   5) $ctg(-225°)$;
   6) $\sin 315°$;
   7) $\cos 120°$;
   8) $\sin(-150°)$;
   9) $\cos\frac{7}{6}\pi$;
   10) $\sin\frac{4\pi}{3}$.
2. Упростите выражения:
   1) $\frac{\cos(-x)\ \cos(180°-x)}{\sin(-x)\ \sin(90°+x)}$;
   2) $\frac{\sin(\pi+x)\ \sin(x+2\pi)}{tg(\pi-x)\ \cos\frac{3}{2}\pi+x}$.

ТЕМА 5. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

Теоретический материал

Косинус суммы двух углов равен произведению косинусов этих углов минус произведение синусов этих углов:

$$\cos(x+y)=\cos x\ \cos y-\sin x\ \sin y$$

Косинус разности двух углов равен произведению косинусов этих углов плюс произведение синусов этих углов:

$$\cos(x-y)=\cos x\ \cos y+\sin x\ \sin y$$

Синус суммы двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго плюс произведение косинуса первого угла на синус второго:

$$\sin(x+y)=\sin x\ \cos y+\cos x\ \sin y$$

Синус разности двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго угла минус произведение косинуса первого угла на синус второго угла:

$$\sin(x-y)=\sin x\ \cos y-\cos x\ \sin y\,.$$

Используя формулы сложения для синуса и косинуса получаются формулы сложения для тангенса и котангенса:

$$tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgx\ tgy} \qquad ctg(x+y)=\frac{ctgx\ ctgy-1}{ctgx+ctgy}$$

$$tg(x-y)=\frac{tgx-tgy}{1+tgx\ tgy} \qquad ctg(x-y)=\frac{ctgx\ ctgy+1}{ctgx-ctgy}$$

Пример 1. Вычислите $\cos 15°$.

Решение: представим $15°$ в виде разности $45°-30°$. Тогда

$$\cos 15°=\cos(45°-30°)=\cos 45°\ \cos 30°+\sin 45°\ \sin 30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Пример 2. Упростите выражение $\cos(x+y)+\cos(x-y)$.

Решение:

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=\cos x\ \cos y-\sin x\ \sin y+\cos x\ \cos y+\sin x\ \sin y=2\cos x\ \cos y$$

Упражнения

1. С помощью формул сложения преобразуйте выражение:

$\cos\ \frac{\pi}{4}+\beta$ $\qquad$ $\sin\ \frac{\pi}{2}-\beta$ $\qquad$ $\cos(\pi+\beta)$ $\qquad$ $\sin\ \frac{\pi}{3}+\beta$

2. Упростите выражения:

$\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\ \cos\beta$ $\qquad$ $\sin\ \frac{\pi}{6}+\alpha\ -\frac{1}{2}\cos\alpha$

$\frac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\ \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\ \sin\beta}$ $\qquad$ $\frac{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\ \sin\beta}{2\sin\alpha\ \cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}$

3. Найдите значение выражения:
   1) $\cos 107°\ \cos 17°+\sin 107°\ \sin 17°$
   2) $\cos 36°\ \cos 24°-\sin 36°\ \sin 24°$
   3) $\sin 63°\ \cos 27°+\cos 63°\ \sin 27°$
   4) $\sin 51°\ \cos 21°-\cos 51°\ \sin 21°$

ТЕМА 6. ФОРМУЛЫ СУММЫ И РАЗНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Теоретический материал

Сумма синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Разность синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\ \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Сумма косинусов двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Разность косинусов двух углов равна взятому со знаком «минус» удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на синус их полуразности

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\ \sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Сумма тангенсов двух углов: $tgx+tgy=\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\ \cos y}$.

Разность тангенсов двух углов: $tgx-tgy=\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\ \cos y}$

Пример 1. Вычислите $\sin10°+\sin50°$.

Решение:

$$\sin10°+\sin50°=2\sin\frac{10°+50°}{2}\ \cos\frac{10°-50°}{2}=2\sin30°\ \cos(-20°)=2\ \frac{1}{2}\ \cos20°=\cos20°$$

Пример 2. Вычислите $\cos90°-\cos30°$.

Решение:

$$\cos90°-\cos30°=-2\sin\frac{90°+30°}{2}\ \sin\frac{90°-30°}{2}=-2\sin60°\ \sin30°=-2\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ \frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Упражнения

1. Представьте в виде произведения:
   1) $\sin40°+\sin16°$
   2) $\sin20°-\sin40°$
   3) $\cos46°-\cos74°$
   4) $\cos15°+\cos45°$
   5) $\sin\dfrac{2\pi}{5}+\sin\dfrac{\pi}{5}$
   6) $\cos\dfrac{11\pi}{12}+\cos\dfrac{3\pi}{4}$
   7) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\alpha$
   8) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)$
   9) $tg25°+tg35°$

ТЕМА 7. ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

Теоретический материал

$\sin 2x = 2\sin x\ \cos x$ $\qquad$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\qquad$ $tg\,2x = \dfrac{2tgx}{1-tg^2 x}$

Пример 1. Упростите выражение $\dfrac{\sin 2x}{\cos x}$.

Решение: $\dfrac{\sin 2x}{\cos x} = \dfrac{2\sin x\ \cos x}{\cos x} = 2\sin x$

Пример 2. Упростите выражение $\dfrac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$.

Решение: $\dfrac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} = \dfrac{(\cos x - \sin x)\ (\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} = \cos x - \sin x$.

Упражнения

1. Упростите выражения:
   1) $\dfrac{\sin 2x}{\sin x}$
   2) $\cos 2x + \sin^2 x$
   3) $\dfrac{\sin 2x}{\cos x} - \sin x$
   4) $\dfrac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} - \cos x$
   5) $\dfrac{2\cos^2 x}{\sin 2x}$
   6) $\left(1 - tg^2 x\right)\ \cos^2 x$
2. Докажите тождества:
   1) $1 - (\sin x - \cos x)^2 = \sin 2x$
   2) $ctgx - \sin 2x = ctgx\ \cos 2x$
   3) $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x = 1$
   4) $4\sin x\ \cos x\ \cos 2x = \sin 4x$
   5) $\sin 2x - tgx = \cos 2x\ tgx$
   6) $(ctgx - tgx)\ \sin 2x = 2\cos 2x$

Самостоятельная работа

В – 1

Упростите выражения: $\dfrac{\sin x}{\sin 2x}$, $\sin\dfrac{\pi}{8}\ \cos\dfrac{\pi}{8}$, $\dfrac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}$.

Вычислите: $2\sin 15^\circ\ \cos 15^\circ$, $\dfrac{tg\,75^\circ}{1-tg^2 75^\circ}$.

В – 2

Упростите выражения: $\cos^2 x - \cos 2x$, $\sin\dfrac{x}{2}\ \cos\dfrac{x}{2}$, $\dfrac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$.

Вычислите: $\dfrac{\sin 100^\circ}{2\cos 50^\circ}$, $\dfrac{tg\dfrac{\pi}{8}}{1-tg^2\dfrac{\pi}{8}}$.